Ex 4 $\to > 0$ ...

Ex 5 Ω 开

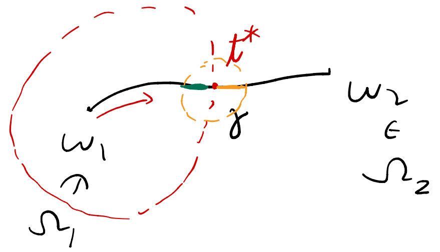
(a) Ω 路径连通 $\Rightarrow$ 连通 $(\Omega \neq U_1 \sqcup U_2)$

假设 $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ Ω_1, Ω_2 非空开集

取 $w_1 \in \Omega_1$, $w_2 \in \Omega_2$ 令 γ 在Ω中连接w_1和w_2的路径

取参数 $z: [0,1] \to \Omega$, $z(0) = w_1$, $z(1) = w_2$

$$t^* = \sup_{0 \le t \le 1} \{t : z(s) \in \Omega_1 \text{ for all } 0 \le s < t\}$$



若 $z(t^*) \in \Omega_1$ 开集

$\exists \varepsilon$, $D_\varepsilon(z(t^*)) \subset \Omega_1$

$z^{-1}(D_\varepsilon(z(t^*))) \subset [0,1]$ 开

与 t^* 是上确界 $\to \leftarrow$

$\Rightarrow z(t^*) \notin \Omega_1$

类似 $z(t^*) \notin \Omega_2$

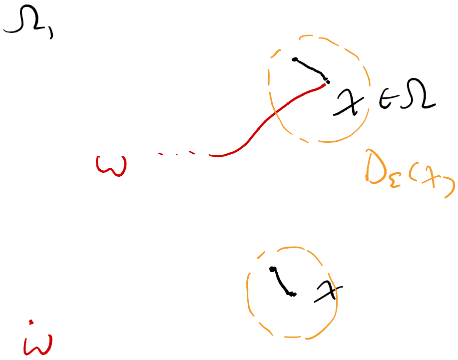
(b) 连通 $\Rightarrow$ 路径连通

取 $w \in \Omega$ 开, 令 $\Omega_1 (\subset \Omega)$ 表示能与 w 相连的点的集合

Ω_1 开 $D_\varepsilon(x) \subset \Omega_1$

$w \in \Omega_1 \neq \emptyset$

令 $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$



Ω_2 开

若 $\Omega_2 \neq \emptyset$

$\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ $\to \leftarrow$

Ex $\quad f(x+iy)=\sqrt{|x||y|} \qquad x,y\in\mathbb{R}$

在 0 满足 CR 但不可导

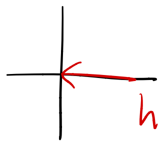
证明 $\quad f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

$v=0$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0 \quad$ ($y=0$ 固定)

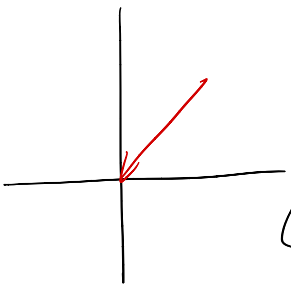
$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0$

CR ✓

但是 当  $h\to 0 \qquad x+iy=h$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{|h|\cdot|0|}-0}{h}\to 0$$

$$\neq$$

当 

$$\frac{\sqrt{|h|\cdot|h|}}{(1+i)h}\to\frac{1}{1+i}$$

$(1+i)h\to 0$

$h\in\mathbb{R} \quad h>0$

$x+iy=(1+i)h$

回顾

- Cauchy 积分公式

D ，$\bar{D} \subset \Omega$ 开集　f 在 Ω 上全纯　$C = \partial D$ 正定向

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

- 全纯函数无穷阶可导

Cauchy 不等式

- $$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \|f\|_C \qquad D = D_R(z_0)$$

- 全纯 ⇒ 解析

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \qquad n \geq 0$$

应用

推论（Liouville 定理）

f 全局且有界 则 f 是常值函数

证明　ETS　$f' = 0$

$\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$　Cauchy 不等式

$$|f'(z_0)| \leq \frac{B}{R} \qquad B = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$$

令 $R \to \infty$　可得 $f'(z_0) = 0$　□

推论（代数基本定理）

$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ P 不常数

则 P 在 $\mathbb{C}$ 上有根

证明 假设 P 在 $\mathbb{C}$ 上无根

先证明 $\frac{1}{P}$ 有界 且全局

考虑 $\begin{cases} |z| > R \\ |z| \le R \end{cases}$

假设 $a_n \neq 0$ 当 $z \neq 0$ 时

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right)$$

当 $|z| \to \infty$ $(\quad) \to 0$

所以 $\exists R > 0$ s.t. $\forall |z| > R, |P(z)| \geq CR^n$ $C = \frac{|a_n|}{2}$

在 $|z| \leq R$ 上，P 连续，$|P|$ 的像集

紧集 能取到下界 $\neq 0$

$\Rightarrow |\frac{1}{P}|$ 有界 $\xRightarrow{\text{Liouville}}$ $\frac{1}{P}$ = 常数 $\rightarrow\leftarrow$ ▣

推论 $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ n 次 $n \geq 1$

$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$

则 $P(z)$ 有 n 个根（计重数）

记成 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 则

$P(z) = a_n (z - w_1) \cdots (z - w_n)$

证明（归纳法）← 对 n

P 有一根 w_1　将 $z=(z-w_1)+w_1$ 代入 $P(z)$

$$P(z) = b_n(z-w_1)^n + \cdots + b_1(z-w_1) + b_0$$

由 $P(w_1)=0 \Rightarrow b_0=0$

$$p(z) = (z-w_1)\underbrace{(b_n(z-w_1)^{n-1}+\cdots+b_1)}_{\text{次数}\le n-1}$$

比较系数可得首系数 $= a_n$　$\square$

"全纯函数被它在小范围内的取值决定"

定理　假设 f 是区域 Ω 上全纯函数

$\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 中的项两两互异，且序列有一聚点 $\in\Omega$

而且 $f(w_k)=0\quad\forall k$　则 $f=0$

证明　令 z_0 为 $\{w_k\}$ 的一聚点 $\in\Omega$

· 取开圆盘 $D\subset\Omega$　以 z_0 为圆心

f 在 D 上的幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

若 $f|_D\ne 0$　则 $\exists$ 最小的自然 m s.t. $a_m\ne 0$

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m(1+g(z-z_0))$$

$g(z-z_0)\to 0$ 当 $z\to z_0$

当 $0<|z-z_0|$ 很小

$$f(z)\ne 0$$

但是 $f(w_n)=0$ $\to\leftarrow$

$z_0\in D\subset X$

$z_0\in \operatorname{int} X=U$

$\Rightarrow f|_D\equiv 0$

$\cancel{X}$

· 令 $U\subset\Omega$ 为 $\{z\in\Omega \mid f(z)=0\}$ 的内部

则 U 是开集，已知 $D\subset U\neq\phi$

设 $z\in U$ 的一个极限点，则连续性 $\Rightarrow f(z)=0$

而且，上面论述 $\Rightarrow$ f 在 $D_\varepsilon(z)$ 上恒为 0

$\Rightarrow D_\varepsilon(z)\subset X \Rightarrow D_\varepsilon(z)\subset U \Rightarrow z\in U$

$\Rightarrow U$ 闭集 $\underset{\Omega\text{连通}}{\Rightarrow}$ $\Omega=U$ 回

$V=\Omega-U$ 开集

$\Omega=U\sqcup V \Rightarrow V=\phi\Rightarrow \Omega=V$

推论 f,g 在 Ω 上全纯 $U\subset\Omega$ 非空开集

$f|_U=g|_U \Rightarrow f=g.$

给定一对函数 f 和 F 其中 $f\in\Omega$ 上全纯

F 在 $\Omega'\supset\Omega$ 上全纯，而 $F|_\Omega=f$ 则

F 是 f 在 Ω' 上的解析延拓，

若解析延拓存在，则唯一.

应用

Morera 定理　(Cauchy 定理的逆)

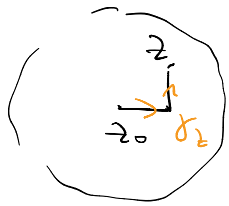
定理 假设 f 在开圆盘上连续，而且对任意三角形 $T \subset D$

$$\int_T f(z)\,dz = 0$$

那么 f 在 D 上全纯

证明 回顾 f 在 D 上有原函数

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)\,d\xi$$



所以 F 全纯，无穷阶可微

$$\Rightarrow f = F' \text{ 也是全纯的} \qquad \square$$